

مجموعه فرمول های

انتقال حرارت

بخش اول: هدایت

تهیه کننده: دکتر بهزاد خداکریمی

وب سایت: www.arshadblog.com

سامانه اطلاع رسانی: 100010009

مقدمه

1-1 - انتقال گرما و مکانیسم‌های آن

1-2 - انتقال گرماک هدایتی

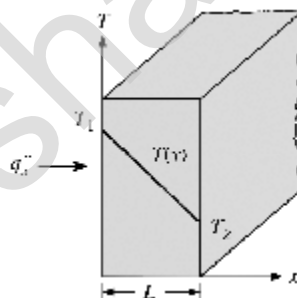
قانون فوریه

حالت یک بعدی و دارای توزیع دمای $T = T(x)$:

$$q_x'' = -k \frac{dT}{dx} \quad (1)$$

برای توزیع دما خطی:

$$q_x'' = k \frac{\Delta T}{L} \quad (2)$$



k : ضریب هدایت گرمایی L : ضخامت صفحه A : سطح مقطع عمود بر جهت انتقال گرما

نرخ انتقال گرما: $q_x = q_x'' A$

شکل سه بعدی قانون فوریه

$$q_x'' = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3)$$

$$q_y'' = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (4)$$

$$q_z'' = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (5)$$

$$\mathbf{q}'' = q_x'' \mathbf{i} + q_y'' \mathbf{j} + q_z'' \mathbf{k} \quad (6)$$

$$\mathbf{q}'' = -k \nabla T \quad (7)$$

شکل دیگر قانون فوریه:

$$q_n'' = -k \frac{\partial T}{\partial n} \quad (8)$$

q_n'' شار گرما در جهت n

$$q_n'' = \sqrt{q_x''^2 + q_y''^2} \quad (9)$$

مواد غیرایزوتروپیک ناهمسانگرد:

$$q_x'' = - \left(k_{11} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{13} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (10)$$

$$q_y'' = - \left(k_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{23} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (11)$$

$$q_z'' = - \left(k_{31} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{32} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{33} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (12)$$

8- برای گازها داریم:

$$k \propto T^{\frac{1}{2}} \quad (\text{الف})$$

$$k \propto M^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{ب})$$

1-3 - انتقال گرماي جابه‌جايي

قانون سرمایش نیوتن

$$q = hA(T_s - T_\infty) \quad (14)$$

h ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی، A سطح، T_s دمای سطح و T_∞ دمای سیال است.

1-4- انتقال گرمای تشعشعی

تشعشع صادر شده از یک جسم با دمای T_s :

$$q = A \varepsilon \sigma T_s^4 \quad (15)$$

$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{K}^4$: ثابت استفان - بولتزمن ε : ضریب صدور

نرخ خالص انتقال گرمای تشعشعی بین دو سطح:

$$q_{\text{rad}} = \varepsilon \sigma A (T_s^4 - T_{\text{surr}}^4) \quad (16)$$

1-5 - قانون بقای انرژی

قانون بقای انرژی برای حجم کنترل

$$\dot{E}_{\text{in}} - \dot{E}_{\text{out}} + \dot{E}_{\text{gen}} = \dot{E}_{\text{st}} \quad (17)$$

قانون بقای انرژی برای سطح کنترل

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} = 0 \quad \text{یا} \quad \dot{E}_{in} = \dot{E}_{out} \quad (18)$$

1-6- ضریب نفوذ گرمایی α

$$\alpha = \frac{k}{\rho C_p} \quad (19)$$

معادلات کلی انتقال گرمای هدایتی

2-1- معادله کلی انتقال گرمای هدایتی

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla q'' + \Phi \quad (1)$$

Φ مربوط به تولید انرژی است.

$$k = \text{cte} \Rightarrow \rho C \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + \Phi \quad (2)$$

در شرایط پایا و بدون تولید انرژی و ضریب هدایت گرمایی ثابت:

$$\nabla^2 T = 0 \quad (\text{معادله لاپلاس}) \quad (3)$$

2-2- معادله انتقال گرما در مختصات کارتزین

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \Phi = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4)$$

$$k = \text{cte} \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\Phi}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5)$$

در شرایط پایا و بدون تولید انرژی و ضریب هدایت گرمایی ثابت:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (6)$$

2-3- معادله انتقال گرما در مختصات استوانه‌ای

$$q'' = -k \nabla T = q_r'' \mathbf{i} + q_\theta'' \mathbf{j} + q_z'' \mathbf{k}$$

$$q_r'' = -k \frac{\partial T}{\partial r}, \quad q_\theta'' = -\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}, \quad q_z'' = -k \frac{\partial T}{\partial z}$$

معادله انتقال گرما در مختصات استوانه‌ای (r, θ, z) :

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \Phi \quad (8)$$

$$k = \text{cte} \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\Phi}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (9)$$

در شرایط پایا و یک بعدی و بدون تولید انرژی و ضریب هدایت گرمایی ثابت:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad (10)$$

2-4 - معادله انتقال گرما در مختصات کروی

$$\mathbf{q}'' = q_r'' \mathbf{i} + q_\theta'' \mathbf{j} + q_\phi'' \mathbf{k}$$

$$q_r'' = -k \frac{\partial T}{\partial r}, \quad q_\theta'' = -\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}, \quad q_\phi'' = -\frac{k}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi}$$

معادله انتقال گرما در مختصات کروی (r, θ, ϕ)

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(k r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\Phi}{k} \quad (11)$$

$$k = \text{cte} \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\Phi}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (12)$$

در شرایط پایا و یک بعدی و بدون تولید انرژی و ضریب هدایت گرمایی ثابت:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad (13)$$

معادله لاپلاس یک بعدی در مختصات مختلف:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[x^n \frac{\partial T}{\partial x} \right] = 0 \quad (14)$$

$n=0$ برای مختصات کارتزین:

$n=1$ برای مختصات استوانه‌ای:

$n=2$ برای مختصات کروی:

انتقال گرمای هدایتی

3-1 - انتقال گرمای یک‌بعدی، پایا، بدون تولید انرژی در دیوار مسطح

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k \frac{\partial T}{\partial x} \right] = 0 \quad \text{معادله انتقال گرما} \quad (1)$$

$$k = \text{cte} \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

$$T(x) = c_1 x + c_2 \quad \text{جواب عمومی} \quad (3)$$

$$T(0) = T_{s,1}, \quad T(L) = T_{s,2} \quad \text{شرایط مرزی}$$

$$T(x) = \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{L} x + T_{s,1} \quad \text{توزیع دما} \quad (4)$$

$$q_x = -kA \frac{dT}{dx} = \frac{kA}{L} (T_{s,1} - T_{s,2}) \quad (5)$$

$$q_x'' = \frac{q_x}{A} = \frac{k}{L} (T_{s,1} - T_{s,2}) \quad (6)$$

3-2 - انتقال گرمای یک‌بعدی، پایا، با تولید انرژی در دیوار مسطح

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \dot{q} = 0 \quad \text{معادله انتقال گرما} \quad (7)$$

$$k = \text{cte} : \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (8)$$

$$T(x) = -\frac{\dot{q}}{2k} x^2 + c_1 x + c_2 \quad \text{جواب عمومی} \quad (9)$$

$$T(-L) = T_{s,1}, \quad T(L) = T_{s,2} \quad \text{شرایط مرزی}$$

$$T(x) = \frac{\dot{q} L^2}{2k} \left[1 - \frac{x^2}{L^2} \right] + \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{2} \frac{x}{L} + \frac{T_{s,1} + T_{s,2}}{2} \quad \text{توزیع دما} \quad (10)$$

حالت خاص: $T_{s,1} = T_{s,2} = T_s$

$$T(x) = \frac{qL^2}{2k} \left[1 - \frac{x^2}{L^2} \right] + T_s \quad (11)$$

$$T_{\max} = T_0 = \frac{qL^2}{2k} + T_s \quad (12)$$

$$\frac{T(x) - T_0}{T_s - T_0} = \left[\frac{x}{L} \right]^2 \quad (13)$$

هرگاه دیواره در مجاورت سیال با دمای T_∞ باشد

$$-k \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = h(T_s - T_\infty) \quad (14)$$

$$T_s = T_\infty + \frac{qL}{h} \quad (15)$$

3-3 - انتقال گرماي يك بعدی، پایا، بدون تولید انرژی در استوانه توخالی

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[kr \frac{\partial T}{\partial r} \right] = 0 \quad (17)$$

$$k = \text{cte} \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial T}{\partial r} \right] = 0 \quad (18)$$

$$T(r) = c_1 \ln r + c_2 \quad \text{جواب عمومی} \quad (19)$$

$$T(r_1) = T_{s,1}, \quad T(r_2) = T_{s,2}$$

r_1 : شعاع داخلی r_2 : شعاع خارجی

$$T(r) = \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\ln(r_1 / r_2)} \ln \left[\frac{r}{r_2} \right] + T_{s,2} \quad \text{یا} \quad \frac{T(r) - T_{s,2}}{T_{s,1} - T_{s,2}} = \frac{\ln(r / r_2)}{\ln(r_1 / r_2)} \quad (20)$$

$$q_r = -kA \frac{dT}{dr} = \frac{2\pi Lk(T_{s,1} - T_{s,2})}{\ln(r_2 / r_1)} \quad (21)$$

$$q_r'' = \frac{k(T_{s,1} - T_{s,2})}{r \ln(r_2 / r_1)} \quad (22)$$

3-4 - انتقال گرماي يك بعدی، پایا، با تولید انرژی در يك استوانه توپر

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[kr \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \frac{q}{k} = 0 \quad (23)$$

$$k = \text{cte} \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \frac{q}{k} = 0 \quad (24)$$

$$T(r) = -\frac{q}{4k} r^2 + c_1 \ln r + c_2 \quad \text{جواب عمومی}$$

$$T(r_0) = T_s, \quad \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0$$

$$T(r) = \frac{\Phi_0^2}{4k} \left[1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right] + T_s \quad \text{یا} \quad \frac{T(r) - T_s}{T_0 - T_s} = 1 - \left[\frac{r}{r_0} \right]^2 \quad (25)$$

T_0 : دمای محور استوانه r_0 : شعاع استوانه

$$T_{\max} = T_0 = \frac{\Phi_0^2}{4k} + T_s \quad (27)$$

اگر استوانه در مجاورت سیال با دمای T باشد:

$$T_s = T_\infty + \frac{\Phi_0}{2h} \quad (28)$$

3-5- انتقال گرماي يك بعدي، پايه، بدون توليد انرژی در يك کره توخالی

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[kr^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right] = 0 \quad (29)$$

$$k = \text{cte} \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right] = 0 \quad (30)$$

$$T(r) = -\frac{c_1}{r} + c_2 \quad \text{جواب عمومی} \quad (31)$$

$$\text{شرایط مرزی: } T(r_1) = T_{s,1}, \quad T(r_2) = T_{s,2}$$

$$T(r) = T_{s,1} - \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{1 - (r_1/r_2)} \left[1 - \frac{r_1}{r} \right] \quad (33)$$

$$q_r = -kA \frac{dT}{dr} = \frac{4\pi k(T_{s,1} - T_{s,2})}{1/r_1 - 1/r_2}$$

$$q_r'' = \frac{k(T_{s,1} - T_{s,2})}{r^2(1/r_1 - 1/r_2)} \quad (34)$$

3-6- انتقال گرماي يك بعدي، پايه، با توليد انرژی در يك کره توپر

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[kr^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \frac{\Phi}{k} = 0 \quad (35)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \frac{\Phi}{k} = 0 \quad (36)$$

$$T(r) = -\frac{\Phi^2}{6k} - \frac{c_1}{r} + c_2 \quad \text{جواب عمومی} \quad (37)$$

$$\text{شرایط مرزی: } T(r_0) = T_s, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$$

$$T(r) = \frac{\Phi_0^2}{6k} \left[1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right] + T_s \quad (38)$$

$$T_{\max} = T_0 = \frac{\Phi_0^2}{6k} + T_s \quad (39)$$

اگر کره در مجاورت سیال با دمای T_∞ باشد:

$$T_s = T_\infty + \frac{q_0}{3h} \quad (40)$$

3-7 - مقاومت گرمایی

$$R_{\text{cond}} = \frac{T_{s1} - T_{s2}}{q_x} \quad (40)$$

دیوار مسطح

$$\text{هدایت: } R_{\text{cond}} = \frac{L}{kA} \quad (41)$$

$$\text{جابه‌جایی: } R_{\text{conv}} = \frac{1}{hA} \quad (42)$$

$$\text{تشعشع: } R_{\text{rad}} = \frac{1}{h_r A} \quad (43)$$

استوانه

$$\text{هدایت: } R_{\text{cond}} = \frac{\ln(r_2 / r_1)}{2\pi Lk} \quad (44)$$

$$\text{جابه‌جایی: } R_{\text{conv}} = \frac{1}{2\pi r Lh} \quad (45)$$

کره

$$\text{هدایت: } R_{\text{cond}} = \frac{1/r_1 - 1/r_2}{4\pi k} \quad (46)$$

$$\text{جابه‌جایی: } R_{\text{conv}} = \frac{1}{4\pi r^2 h} \quad (47)$$

3-8 - دیوار مرکب

ضریب انتقال گرمای کلی (U):

$$q_x = UA\Delta T \quad (48)$$

$$U = \frac{1}{R_t A} \quad (49)$$

3-11 - مقاومت گرمایی تماس

$$R''_{t,c} = \frac{T_A - T_B}{q''_x} \quad (50)$$

3-12 - شعاع بحرانی

برای استوانه:

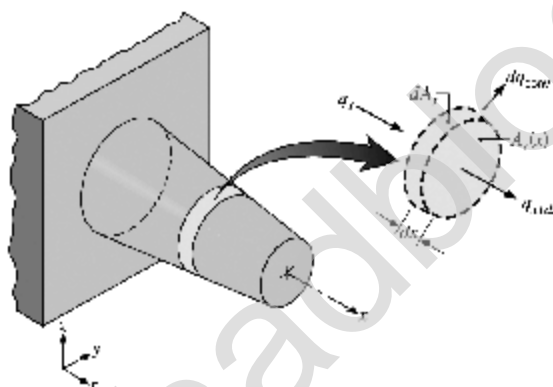
$$r_c = \frac{k}{h} \quad (51)$$

برای کره:

$$r_c = \frac{2k}{h} \quad (52)$$

سطوح گسترش یافته (پره ها)

4-1 - معادله دیفرانسیل حاکم

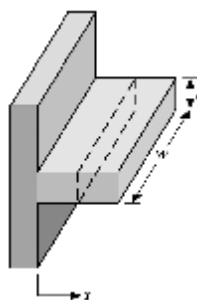


$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \left[\frac{1}{A_c} \frac{dA_c}{dx} \right] \frac{dT}{dx} - \left[\frac{1}{A_c} \frac{h}{k} \frac{dA_s}{dx} \right] (T - T_\infty) = 0 \quad (1)$$

A_c : مساحت سطح مقطع (می تواند با x تغییر کند)

A_s : مساحت سطح از پای پره تا x

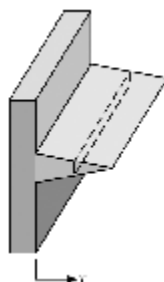
پره مستطیلی:



$$\theta = T - T_\infty, \quad m^2 = \frac{hP}{kA}$$

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - m^2 \theta = 0$$

پره مثلثی:

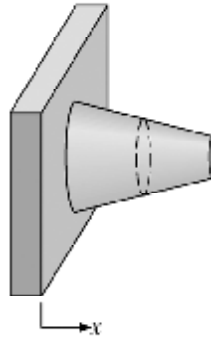


$$\theta = T - T_\infty, \quad m^2 = \frac{2hL}{kt}$$

$$x^2 \frac{d^2 \theta}{dx^2} + x \frac{d\theta}{dx} - m^2 x \theta = 0$$

پره مخروطی:

$$x^2 \frac{d^2 \theta}{dx^2} + 2x \frac{d\theta}{dx} - m^2 x \theta = 0, \quad m^2 = \frac{2hL}{kR}$$



L: طول پره ، t: ضخامت پره در محل اتصال به پایه

4-2- توزیع دما در پره‌های با سطح مقطع یکنواخت

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - m^2 \theta = 0 \quad \text{معادله دیفرانسیل} \quad (2)$$

$$\theta(x) = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx} \quad \text{جواب عمومی} \quad (3)$$

شرایط مرزی اول:

$$\theta(0) = T_b - T_\infty \equiv \theta_b$$

(1) پره نوع اول (پره طولانی)

$$x \rightarrow \infty: T = T_\infty \Rightarrow \theta = 0$$

$$\frac{\theta}{\theta_b} = e^{-mx} \quad \text{توزیع دما} \quad (4)$$

(2) پره نوع دوم (نوک پره عایق)

$$x = L: \frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = 0$$

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL} \quad \text{توزیع دما} \quad (5)$$

(3) پره نوع سوم (انتقال گرمایی جابه‌جایی در نوک پره)

$$x = L: -k \frac{dT}{dx} = h(T - T_\infty) \Rightarrow -k \frac{d\theta}{dx} = h\theta$$

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh m(L-x) + (h/mk) \sinh m(L-x)}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL} \quad \text{توزیع دما} \quad (6)$$

(4) پره نوع چهارم (دمای نوک پره مشخص)

$$x = L: T = T_L \Rightarrow \theta = \theta_L$$

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\theta_L / \theta_b \sinh mx + \sinh m(L-x)}{\sinh mL} \quad (7)$$

4-3 - انتقال گرما در پره‌ها

روش اول:

$$q_f = -kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} \Rightarrow q_f = -kA \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=0} \quad (8)$$

روش دوم:

$$q_f = \int_0^L hA\theta dx \quad (9)$$

1- پره طولانی

$$q_f = M \quad (10)$$

2- نوک پره عایق

$$q_f = M \tanh mL \quad (11)$$

3- انتقال گرمای جابه‌جایی در نوک پره

$$q_f = M \frac{\sinh mL + (h / mk) \cosh mL}{\cosh mL + (h / mk) \sinh mL} \quad (12)$$

4- دمای نوک پره مشخص

$$q_f = M \frac{\cosh mL - \theta_L / \theta_b}{\sinh mL} \quad (13)$$

در معادلات (10) تا (13) $M = \sqrt{hpkA_c} \theta_b$ است.

4-4 - راندمان پره

$$\eta_{fin} = \frac{q_f}{q_{max}} \quad (14)$$

برای پره‌های طولانی:

$$\eta_f = \frac{1}{mL} \quad (16)$$

برای پره‌های با نوک عایق:

$$\eta_f = \frac{\tanh mL}{mL} \quad (17)$$

$$q_{max} = hA_f (T_b - T_\infty) = hpL\theta_b \quad (15)$$

4-5 - ضریب تأثیر پره

$$\varepsilon_f = \frac{\text{نرخ انتقال گرما با پره}}{\text{نرخ انتقال گرما بدون پره}} = \frac{q_f}{hA_{c,b}\theta_0} = \eta_f \frac{A_f}{A_b} \quad (18)$$

A_f : کل سطح پره A_b : سطح مقطع پره

برای پره‌های طولانی داریم:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{kp}{hA_c}} \quad (19)$$

برای پره‌های با نوک عایق داریم:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{kp}{hA_c}} \tanh mL \quad (20)$$

راندمان کلی n پره :

$$\eta_o = \frac{q_t}{q_{t,\max}} = \frac{q_t}{hA_t \theta_b} \quad (21)$$

$$A_t = A_b + nA_f \quad (22)$$

A_f : سطح هر پره و A_b : سطح اصلی

$$\eta_o = 1 - \frac{nA_f}{A_t} (1 - \eta_f) \quad (23)$$

4-6- روش هارپر و براون

شرط فرض پره نازک:

$$\left[\frac{ht}{2k} \right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad \frac{ht}{k} \leq \frac{1}{2} \quad (24)$$

طول اصلاح شده عبارت است از:

$$L_c = L + \frac{A}{P} \quad (25)$$

مجموعه فرمول های

انتقال حرارت

بخش دوم: جابجایی

تهیه کننده: دکتر بهزاد خداکرمی

وب سایت: www.arshadblog.com

سامانه اطلاع رسانی: 100010009

انتقال گرمای جابه‌جایی

7-1- مقدمه

شار انتقال گرمای جابه‌جایی موضعی:

$$q''_{\text{conv}} = h(T_w - T_\infty) \quad (1)$$

نرخ انتقال گرمای کلی:

$$q = \bar{h}A(T_w - T_\infty) \quad (2)$$

در معادلات فوق h ضریب جابه‌جایی موضعی و \bar{h} ضریب جابه‌جایی متوسط است.

7-2- ضریب جابه‌جایی

ضریب جابه‌جایی متوسط:

$$\bar{h} = \frac{1}{A_s} \int_{A_s} h dA_s \quad (3)$$

برای صفحه تخت:

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \int_0^L h dx \quad (4)$$

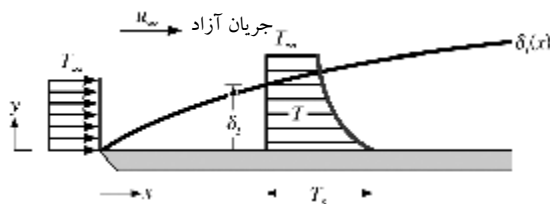
در حرکت یک سیال روی صفحه:

$$h = \frac{-k_f \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}}{T_w - T_\infty} \quad (5)$$

k_f : ضریب هدایت گرمایی سیال

7-3- لایه مرزی گرمایی

صفحات لایه مرزی گرمایی δ_i در هر نقطه در روی سطح به صورت فاصله‌ای از سطح تعریف می‌گردد که در آن $\frac{T - T_s}{T_\infty - T_s} = 0.99$ است.



شکل 7-2: لایه مرزی گرمایی روی یک صفحه تخت

7-4 - معادلات لایه مرزی

(1) لایه مرزی سرعت

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (7)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

(2) لایه مرزی گرمایی

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\nu}{C_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (8)$$

شکل بی بعد معادلات لایه مرزی

$$x^* \equiv \frac{x}{L}, \quad y^* \equiv \frac{y}{L}, \quad u^* \equiv \frac{u}{U}, \quad v^* \equiv \frac{v}{U}, \quad T^* \equiv \frac{T - T_s}{T_\infty - T_s}, \quad P^* \equiv \frac{P}{\rho U^2}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (10)$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{dP^*}{dx^*} + \frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (11)$$

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re_L Pr} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} + \frac{Ec}{Re_L} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 \quad (12)$$

7-5 - تشابه رینولدز

$$\frac{C_f}{2} = St \quad (13)$$

:(St)

$$St = \frac{h}{\rho V C_p} = \frac{Nu}{Re.Pr} \quad (14)$$

$$Nu = \frac{h L_c}{k} \quad (15)$$

7-6 - تشابه رینولدز - کلبورن

$$St.Pr^{\frac{2}{3}} = \frac{C_f}{2} = \frac{f}{8} \quad (16)$$

$$St_x Pr^{\frac{2}{3}} = \frac{C_{fx}}{2}, \quad \overline{St} Pr^{\frac{2}{3}} = \frac{\overline{C_f}}{2} \quad (17)$$

7-7 - جریان روی صفحه تخت

(1) جریان آرام

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (18)$$

معادله پیوستگی:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (19)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (20)$$

شرایط مرزی:

$$y=0 : u=0, T=T_w$$

$$y=0 : \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$$

$$y=\delta : u=U_\infty, T=T_\infty$$

$$y=\delta : \frac{\partial u}{\partial y}=0, \frac{\partial T}{\partial y}=0$$

نتایج حاصل از حل معادلات فوق به صورت زیر است:

$$\delta = \frac{5x}{\sqrt{Re_x}} \quad \text{ضخامت لایه ی مرزی} \quad (21)$$

$$C_f = 0.664 Re_x^{-\frac{1}{2}} \quad \text{ضریب اصطکاک} \quad (22)$$

$$Nu_x = 0.332 Re_x^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}} \quad \text{عدد ناسلت} \quad (23)$$

در حالت میانگین داریم:

$$\begin{cases} \bar{h} = 2h_{x=L} \\ \bar{C}_f = 2C_{f_{x=L}} \\ \bar{Nu} = 2Nu_{x=L} \end{cases} \quad (24)$$

$$\frac{\delta}{\delta_t} ; Pr^{\frac{1}{3}} \quad (25)$$

دمای فیلم:

$$T_f = \frac{T_w + T_\infty}{2}$$

دمای متوسط با دمای کپه ای سیال:

$$T_b = \frac{\int_0^\delta u \rho C_p T dy}{\int_0^\delta u \rho C_p dy} \quad (26)$$

(2) جریان درهم

$$\delta = \frac{0.37x}{Re_x^{\frac{1}{5}}} \quad \text{ضخامت لایه مرزی} \quad (27)$$

$$C_{f_x} = 0.0592 Re_x^{-\frac{1}{5}} \quad \text{ضریب اصطکاک} \quad (28)$$

$$Nu_x = 0.0296 Re_x^{\frac{4}{5}} Pr^{\frac{1}{3}} \quad \text{عدد ناسلت} \quad (29)$$

شار گرمای یکنواخت در صفحه

$$Nu_{q''=cte} = 1/36 Nu_{T=cte} \quad \text{جریان آرام} \quad (31)$$

$$Nu_{q''=cte} = 1/04 Nu_{T=cte} \quad \text{جریان درهم} \quad (32)$$

$$T_s(x) = T_\infty + \frac{q''_x}{h} \quad (33)$$

طول ورودی آدیاباتیک

اگر طول ورودی آدیاباتیک وجود داشته باشد به طوری که لایه مرزی در $x = d$ شروع گردد داریم:

$$Nu_x = \frac{Nu|_{d=0}}{\left[1 - (d/x)^{\frac{3}{4}}\right]^{\frac{1}{3}}} \quad \text{جریان آرام} \quad (34)$$

$$Nu_x = \frac{Nu|_{d=0}}{\left[1 - (d/x)^{\frac{9}{10}}\right]^{\frac{1}{9}}} \quad (35)$$

لایه‌های مرزی مرکب

$$\bar{h}_L = \frac{1}{L} \left[\int_0^{x_c} h_{lam} dx + \int_{x_c}^L h_{turb} dx + \right] \quad (36)$$

با فرض $Re_{x,c} = 5 \times 10^5$ نتایج حاصله به شرح زیر است:

$$\overline{Nu}_L = \left[0.037 Re_L^{\frac{4}{5}} - 871 \right] Pr^{\frac{1}{3}} \quad (37)$$

$$\bar{C}_{f,L} = \frac{0.074}{Re_L^{\frac{1}{5}}} - \frac{1742}{Re_L} \quad (38)$$

اگر x_c ؟ L ؟ (یا $Re_{x,c}$ ؟ Re_L) باشد داریم:

$$\overline{Nu}_L = 0.037 Re_L^{\frac{4}{5}} Pr^{\frac{1}{3}} \quad (39)$$

$$\bar{C}_{f,L} = 0.074 Re_L^{-\frac{1}{5}} \quad (40)$$

7-8- روش انتگرالی ون کارمن

معادله انتگرالی انرژی عبارت است از:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} u(T_\infty - T) dy = \alpha \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (41)$$

$$\frac{\delta_t}{\delta} = Pr^{-\frac{1}{2}} \quad (42)$$

$$Nu = 0.54 Pe^{\frac{1}{2}} \quad (43)$$

7-9- جریان حول استوانه و کره

جریان حول یک استوانه:

در نقطه جدایش:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0$$

معادله هیلپرت:

$$Nu = c Re^m Pr^{\frac{1}{3}} \quad (44)$$

جریان روی کره:

قانون استوکس:

$$C_D = \frac{24}{Re_D} \quad Re_D < 0.5 \quad (45)$$

معادله تیاکر:

$$\overline{Nu}_D = 2 + \left[0.4 Re_D^{\frac{1}{2}} + 0.06 Re_D^{\frac{2}{3}} \right] Pr^{0.4} \left[\frac{\mu}{\mu_s} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (46)$$

برای محاسبه ضریب انتقال کره از قطرات مایع در حال سقوط آزاد از رابطه رانز و مارشال استفاده می‌شود:

$$\overline{Nu}_D = 2 + 0.6 Re_D^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}} \quad (47)$$

در حالتی که سیال ساکن اطراف یک کره داشته باشیم $\overline{Nu}_D = 2$ است.

7-10- جریان عمود بر مجموعه لوله‌ها

$$\overline{Nu}_D = 1.13 c_1 Re_{D,max}^m Pr^{\frac{1}{3}} \quad (48)$$

در محاسبه $Re_{D,max}^m$ از ماکزیمم سرعت سیال استفاده می‌گردد.

c_1 و m ثابت‌های مربوط به نوع آرایش لوله‌ها و گام‌های عرضی و طولی

7-11- جریان داخلی

شرط توسعه یافته بودن گرمایی:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{T - T_s}{T_m - T_s} \right]_{fd,t} = 0 \quad (49)$$

T_m دمای میانگین سیال در سطح مقطع لوله و T_s دمای سطح لوله است.

طول ناحیه ورودی گرمایی (x_t) :

$$\left[\frac{x_t}{d} \right] = 0.05 Re_d Pr \quad (50)$$

جریان آرام:

$$\left[\frac{x_t}{d} \right] = 10 \quad \text{جریان درهم} \quad (51)$$

1) شار گرمایی ثابت سطح

$$q = q_s''(pL) = mC_p (T_m(x) - T_{m,i}) \quad (52)$$

دمای میانگین سیال در خروجی لوله:

$$T_m(x) = T_{m,i} + \frac{q_s'' p}{m C_p} x \quad (53)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad \text{برای جریان آرام:}$$

عدد ناسلت در جریان آرام در این شرایط مقدار ثابتی بوده و عبارت است از:

$$Nu = 4 / 36 \quad (54)$$

2) دمای سطح ثابت

در این حالت دمای سطح لوله مقدار ثابت T_s است.

$$\frac{T_s - T_m(x)}{T_s - T_{m,i}} = \exp \left[- \frac{px}{m C_p} \bar{h} \right] \quad (55)$$

نرخ انتقال گرمای کلی:

$$q = \bar{h} A \Delta T_{lm} \quad (56)$$

$$\Delta T_{lm} = \frac{T_{m,o} - T_{m,i}}{\ln \frac{T_s - T_{m,o}}{T_s - T_{m,i}}} = \frac{\Delta T_o - \Delta T_i}{\ln \frac{\Delta T_o}{\Delta T_i}} \quad (57)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad \text{برای جریان آرام:}$$

$$Nu = 3 / 66 \quad (58)$$

دمای متوسط:

$$T_b = \frac{\int_0^{\eta} (2\pi r dr) \rho u C_p T}{\int_0^{\eta} (2\pi r dr) \rho u C_p} \quad (59)$$

7-12- جریان درهم داخل لوله‌ها

معادله دیتوس - بولتر

$$Nu_D = 0.023 Re_D^{\frac{4}{5}} Pr^n \quad (60)$$

برای گرمایش $n = 0.4 : (T_s > T_m)$

برای سرمایش $n = 0.3 : (T_s < T_m)$

هرگاه اختلاف دماهای $T_s - T_m$ زیاد باشد:

$$Nu_D = 0.027 Re_D^{\frac{4}{5}} Pr^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\mu}{\mu_s} \right)^{0.14} \quad (61)$$

طول ورودی برای جریان درهم کوتاه است می‌توان فرض کرد که \overline{Nu} برای کل لوله با Nu مربوط به ناحیه کاملاً توسعه یافته برابر است:

$$\overline{Nu}_D = Nu_{D,ft}$$

ولی در لوله‌های کوتاه:

$$\overline{Nu}_D > Nu_{D,ft}$$

7-13 - مجاری غیردایره‌ای

قطر هیدرولیکی:

$$D_h = \frac{4A_c}{P} \quad (62)$$

A_c : سطح مقطع جریان P : محیط تر شده

برای مجرای بین دو لوله هم‌محور:

$$Nu_i = \frac{h_i D_h}{k}, \quad Nu_o = \frac{h_o D_h}{k} \quad (63)$$

قطر هیدرولیکی:

$$D_h = D_o - D_i \quad (64)$$

جابه جایی طبیعی

8-1- مقدمه

8-1- معادلات حاکم بر انتقال گرما و جابه جایی طبیعی

$$\text{معادله پیوستگی} : \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\text{معادله اندازه حرکت} : u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g\beta(T - T_{\infty}) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2)$$

$$\text{معادله انرژی} : u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3)$$

β : ضریب انبساط حجمی

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \rho}{\partial T} \right]_p \quad (4)$$

$$\beta = \frac{1}{T_f} \quad \text{برای گاز ایده آل:}$$

$$T_f = \frac{T_w + T_{\infty}}{2} \quad \text{برای دمای فیلم است:}$$

$$\beta \approx -\frac{1}{\rho} \frac{\rho_{\infty} - \rho}{T_{\infty} - T} \quad \text{برای گازهای واقعی و مایعات:}$$

بزرگ بودن β برای یک سیال به معنی زیاد بودن تغییرات چگالی آن با دما است.

8-2- تعیین توزیع سرعت و توزیع دما

شرایط مرزی:

$$y=0 : u=0, \quad T=T_w$$

$$y=0 : \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{g\beta(T_w - T_{\infty})}{\nu}$$

$$y=\delta : \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

$$y=\delta : u=0, \quad T=T_{\infty}$$

$$\frac{u}{u_x} = \frac{y}{\delta} \left[1 - \frac{y}{\delta} \right]^2 \quad (5)$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = \left[1 - \frac{y}{\delta} \right]^2 \quad (6)$$

u_x یک سرعت مجازی بوده که تابعی از x است.

عدد گرافش:

$$Gr_L = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L^3}{\nu^2} \quad (7)$$

3-8- روابط جابه‌جایی طبیعی

$$Nu_L = \frac{\bar{h}L}{k} = c(Gr_L \cdot Pr) = cRa_L^n \quad (8)$$

Ra : عدد رایلی

$$Ra = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L_c^3}{\nu\alpha} \quad (9)$$

مقادیر c و n به هندسه سطح و رژیم جریان بستگی دارند.

$$n = \frac{1}{4} \quad \text{جریان آرام}; \quad n = \frac{1}{3} \quad \text{جریان درهم}$$

(1) صفحه عمودی

$$Nu_x = \left[\frac{Gr_x}{4} \right]^{\frac{1}{4}} g(Pr) \quad (10)$$

برای جریان آرام داریم:

$$\bar{h} = \frac{4}{3} h \Big|_{x=L} \quad \text{در شرایط دمایی ثابت سطح}$$

$$\bar{h} = \frac{5}{4} h \Big|_{x=L} \quad \text{در شرایط شار گرمایی ثابت در سطح}$$

سرعت ماکزیمم در $y = \frac{\delta}{3}$ حاصل می‌شود.

$$h_x = \frac{2k}{\delta} \quad (11)$$

$$Nu_x = \frac{2x}{\delta} \quad (12)$$

(2) جابه‌جایی طبیعی روی استوانه

برای استوانه افقی:

$$Nu_D = C Ra_D^n$$

اگر شرط زیر برقرار باشد یک استوانه عمودی را می‌توان یک صفحه عمودی در نظر گرفت:

$$\frac{D}{L} \geq \frac{35}{Gr_L^{\frac{1}{4}}} \quad (13)$$

(6) جابه‌جایی طبیعی روی کره

معادله زیر برای کره دما ثابت و سیالات با عدد پراتل نزدیک به یک به کار می‌رود:

$$Nu_D = 2 + 0.43 Ra_D^{0.25} \quad 1 < Ra_D < 10^5$$

8-4- انتقال گرمای جابه‌جایی اجباری طبیعی توأم

$$Nu^n_{\text{کل}} = Nu^n_{\text{طبیعی}} \pm Nu^n_{\text{اجباری}} \quad (14)$$

جریان‌های هم‌جهت و جریان‌های مورب: +

جریان‌های غیر هم‌جهت: -

جوشش و میعان

9-1- مقدمه

9-2- جوشش

$$q_s'' = h(T_s - T_{sat}) = h \Delta T_e \quad (1)$$

رژیم‌های مختلف جوشش استخری:

1- جوشش جابه‌جایی آزاد: $\Delta T_e \leq 5^\circ\text{C}$ است.

$$\begin{aligned} \text{جریان آرام: } h &\propto \Delta T_e^{\frac{1}{4}}, \quad q'' \propto \Delta T_e^{\frac{5}{4}} \\ \text{جریان درهم: } h &\propto \Delta T_e^{\frac{1}{3}}, \quad q'' \propto \Delta T_e^{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

2- جوشش هسته‌ای یا حبابی: $5^\circ\text{C} \leq \Delta T_e \leq 30^\circ\text{C}$

رابطه بین q_s'' و ΔT_e :

$$q_s'' = \mu_l h_{fg} \left[\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\sigma} \right]^{1/2} \left(\frac{C_{p,l} \Delta T_e}{C_{s,f} h_{fg} \text{Pr}_l^n} \right)^3 \quad (2)$$

اندیس‌های l و v به حالت‌های مایع و بخار اشباع اشاره می‌کنند.

σ : کشش سطحی h_{fg} : گرمای نهان تبخیر آب

مقادیر ضرایب $C_{s,f}$ و n به ترکیب سطح - مایع وابسته هستند

3- جوشش انتقالی: $30^\circ\text{C} \leq \Delta T_e \leq 120^\circ\text{C}$

4- جوشش لایه‌ای

ضریب انتقال گرمای کلی برای لوله‌های افقی:

$$\frac{4}{(\bar{h})^3} = \frac{4}{(\bar{h}_{\text{conv}})^3} + \bar{h}_{\text{rad}} \frac{1}{(\bar{h})^3} \quad (3)$$

هرگاه $\bar{h}_{\text{rad}} < \bar{h}_{\text{conv}}$

$$\bar{h} = \bar{h}_{\text{conv}} + \frac{3}{4} \bar{h}_{\text{rad}} \quad (4)$$

9-3- میعان

9-4- میعان لایه‌ای روی یک صفحه تخت قائم

توزیع سرعت برای لایه مایع در میعان لایه‌ای آرام:

$$u(y) = \frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\mu_l} \left(\delta y - \frac{1}{2} y^2 \right) \quad (5)$$

نرخ دبی جرمی بر واحد عرض صفحه عبارت است از:

$$\Gamma(x) = \frac{\rho_l(\rho_l - \rho_v) g \delta^3}{3\mu_l} \quad (6)$$

در معادلات فوق δ ضخامت لایه است.

$$h = \frac{k}{\delta} \quad (5) \quad \bar{h} = \frac{4}{3} h \Big|_{x=L} \quad (4) \quad h \propto \Delta T^{-\frac{1}{4}} \quad (3) \quad h \propto x^{-\frac{1}{4}} \quad (2) \quad \delta \propto x^{\frac{1}{4}} \quad (1)$$

کل انتقال گرما به سطح:

$$q = \bar{h}_L A (T_{\text{sat}} - T_s) \quad (7)$$

نرخ کل میعان:

$$\dot{m} = \frac{\bar{h}_L A (T_{\text{sat}} - T_s)}{h'_{fg}} \quad (8)$$

که h'_{fg} گرمای نهان تبخیر اصلاح شده است و از رابطه $h'_{fg} = h_{fg} + 0.68 C_{p,l} (T_{\text{sat}} - T_s)$ به دست می آید.

رژیم جریان:

$$\text{Re}_f = \frac{4\Gamma}{\mu_l} \quad (9)$$

برای یک صفحه به طول L :

$$\text{Re}_f = \frac{4\bar{h}_L L (T_{\text{sat}} - T_w)}{h_{fg} \mu_l} \quad (10)$$

ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی در میعان فیلمی:

$$h_x = \left[\frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) k_l^3 h'_{fg}}{4 \mu_l (T_{\text{sat}} - T_s)} x \right]^{\frac{1}{4}} \quad (11)$$

$$\bar{h}_L = 0.943 \left[\frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) k_l^3 h'_{fg}}{\mu_l (T_{\text{sat}} - T_s) L} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (12)$$

ضخامت لایه مرزی:

$$\delta(x) = \left[\frac{4 k_l \mu_l (T_{\text{sat}} - T_s) x}{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) h'_{fg}} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (13)$$

9-5- عدد میعان

$$Co = \bar{h} \left[\frac{\mu^2}{k^3 \rho (\rho - \rho_v) g} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (14)$$

9-6- سطوح مایل

$$h_{\text{صفحه مایل}} = h_{\text{صفحه قائم}} (\cos \theta)^{\frac{1}{4}}$$



9-7- میعان لایه‌ای آرام در سیستم‌های شعاعی

برای میعان روی لوله افقی و کره:

$$\bar{h}_D \propto D^{-\frac{1}{4}}$$

برای N لوله افقی زیر هم:

$$\bar{h}_{D,N} = \bar{h}_D N^{-\frac{1}{4}} \quad (15)$$

دو معادله فوق \bar{h}_D ضریب انتقال گرمای لوله بالایی است.